On considère deux nombres réels strictement positifs R et α, $\alpha < 1$, auxquels on associe le réel $r = \alpha R$. Dans toute la suite, on suppose le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ et on considère :
- le point A de coordonnées $(R, 0)$.
- le cercle C de centre O et de rayon R.
- le cercle γ centré sur la demi-droite $[O, \vec{i})$, de rayon r, et tangent intérieurement à C en A.

De plus, pour tout nombre réel t, on considère :
- le cercle $\gamma(t)$ centré sur la demi-droite d'angle polaire t, de rayon r, et tangent intérieurement à C.
- le point $\omega(t)$ centre du cercle $\gamma(t)$.
- le point $C(t)$ en lequel les cercles $\gamma(t)$ et C sont tangents.

Il est recommandé aux candidats de construire une figure claire faisant apparaître ces différents éléments.

On fait rouler sans glisser le cercle γ à l'intérieur du cercle fixe C en supposant qu'il coïncide à l'instant t avec le cercle $\gamma(t)$, et on étudie alors la trajectoire $H(\alpha)$ du point lié au cercle γ situé en A à l'instant 0. On désigne par $M(t)$ la position de ce point à l'instant t (au moment où γ coïncide avec le cercle $\gamma(t)$).
Dans la partie I, on étudie et on construit H(1/3).
Dans la partie II, on étudie $H(\alpha)$ en distinguant les deux cas où α est rationnel ou irrationnel.

PRÉLIMINAIRE : équations paramétriques de l'hypocycloïde $H(\alpha)$

1°) L'hypothèse de roulement sans glissement se traduit, par définition, par l'égalité à tout instant t des deux longueurs des arcs orientés $M(t)C(t)$ et $AC(t)$ des cercles $\gamma(t)$ et C.

a) Préciser la longueur commune des longueurs de ces deux arcs orientés.

b) En déduire des mesures des angles orientés $(\overrightarrow{\omega(t)M(t)}, \overrightarrow{\omega(t)C(t)})$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{\omega(t)M(t)})$ en fonction de t.

c) Déterminer les affixes des points $C(t)$ et $\omega(t)$.

d) En écrivant $\overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{O\omega(t)} + \overrightarrow{\omega(t)M(t)}$, déterminer l'affixe $z(t)$ du point $M(t)$ en fonction de t, R, α.
On vérifiera en particulier l'égalité suivante pour $\alpha = 1/3$:

$$z(t) = \frac{R}{3}(2e^{it} + e^{-2it}).$$

PARTIE I : étude et construction de H(1/3)

2°) Construction de H(1/3)

a) Comparer $z(t + 2\pi/3)$ et $z(t)$, puis $z(-t)$ et $z(t)$.
Que peut-on en conclure géométriquement, et sur quel intervalle I suffit-il d'étudier H(1/3) ?

b) Déterminer l'affixe $z'(t)$ du vecteur-dérivé, préciser son module et un argument pour t appartenant à I.

c) En déduire les valeurs de t appartenant à I pour lesquelles le point $M(t)$ est régulier, puis préciser alors l'expression des vecteurs unitaires $\overrightarrow{T(t)}$ et $\overrightarrow{N(t)}$ du repère de Frenet en $M(t)$.

d) Étudier les variations de $x(t) = \mathrm{Re}(z(t))$ et $y(t) = \mathrm{Im}(z(t))$ pour t appartenant à I.

e) Construire la trajectoire H(1/3) de $M(t)$ lorsque t varie.

3°) Courbure et développée de H(1/3)

a) Déterminer pour t appartenant à I l'abscisse curviligne $s(t)$ du point $M(t)$, cette abscisse curviligne s étant d'origine $M(\pi/3)$ et orientée dans le sens des t croissant. En déduire la longueur de H(1/3).

b) Déterminer une mesure $\phi(t)$ de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{T(t)})$ pour t appartenant à I, $t \neq 0$.

c) En déduire le rayon de courbure $\rho(t)$ en $M(t)$ pour t appartenant à I, $t \neq 0$.

d) Vérifier que l'affixe $\zeta(t)$ du centre de courbure $\Omega(t) = M(t) + \rho(t)\overrightarrow{N(t)}$ est égale à $\zeta(t) = R(2e^{it} - e^{-2it})$.

e) Comparer $\zeta(t)$ et $z(t + \pi/3)$. Que peut-on en conclure géométriquement ?
Construire sur une même figure les trajectoires de $M(t)$ et $\Omega(t)$ lorsque t varie.

PARTIE II : étude de H(α) pour α rationnel et irrationnel

4°) Étude et construction de H(α)

a) Comparer $z(t + 2\pi\alpha)$ et $z(t)$, puis $z(-t)$ et $z(t)$.
Que peut-on en conclure géométriquement, et sur quel intervalle I suffit-il d'étudier H(α) ?

b) Déterminer l'affixe $z'(t)$ du vecteur-dérivé et préciser son module et un argument.

c) Vérifier que les points stationnaires (ou non réguliers) sont les points $M(t_q)$ où $t_q = 2\pi q\alpha$ où $q \in \mathbb{Z}$.
Déterminer l'affixe z_q de $M(t_q)$ et indiquer comment $M(t_{q+1})$ se déduit de $M(t_q)$.
Exprimer $z''(t_q)$ à l'aide de $z_q = z(t_q)$ et en déduire que les points stationnaires sont de rebroussement.

d) Si $\alpha = p/q$ est rationnel (avec p, q entiers naturels premiers entre eux), préciser les affixes et le nombre des points stationnaires distincts de H(p/q).
Donner ainsi sans autre justification l'allure de H(2/3) après avoir placé ses points stationnaires.

e) Si α est irrationnel, montrer que les points $M(t_q)$ sont deux à deux distincts.

5°) Densité des points de rebroussement de H(α) dans le cercle C pour α irrationnel

On considère le sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ défini par $G = \{ q\alpha + p \,/\, p, q \in \mathbb{Z} \}$ où $\alpha > 0$ est irrationnel, et la partie G_+^* formée des éléments strictement positifs de G dont on note g la borne inférieure.
On admet dans cette question, ce qui sera établi ultérieurement, que $g = 0$.

a) Montrer qu'il existe, pour tout réel $\varepsilon > 0$ et tout réel x, deux entiers p et q tels que $| x - q\alpha + p | < \varepsilon$.

b) En déduire, pour tout réel $\varepsilon > 0$ et pour tout réel θ, qu'il existe au moins un point stationnaire $M(t_q)$ d'affixe z_q appartenant à H(α) tel que $\left|Re^{i\theta} - z_q\right| < \varepsilon$.

c) Établir que les points de rebroussement de H(α) sont denses dans le cercle C si et seulement si le réel α est irrationnel.

6°) Densité dans R du sous-groupe G = { $q\alpha + p$ / $p, q \in \mathbb{Z}$ } pour α irrationnel

Les notations étant celles de la question précédente, on établit ici que $g = 0$ par deux méthodes distinctes.

6.1 On donne une première démonstration, par l'absurde, de l'égalité $g = 0$ et on suppose donc $g > 0$.
Montrer, si g n'appartient pas à G, qu'il existe deux éléments g_1 et g_2 de G tels que $g < g_2 < g_1 < 2g$, puis qu'il existe un élément g_0 de G tel que $0 < g_0 < g$.
Qu'en déduit-on pour g ?

6.2 On donne une deuxième démonstration, constructive, de l'égalité $g = 0$.

a) On considère la suite (x_n) définie par $x_0 = \alpha$ et $x_{n+1} = 1/(x_n - [x_n])$ où $[x_n]$ est la partie entière de x_n. Montrer que x_n est irrationnel pour tout nombre entier naturel n, supérieur à 1 pour $n \geq 1$.

b) On définit deux suites de nombres entiers par $p_0 = 1$, $p_1 = [\alpha]$ et $q_0 = 0$, $q_1 = 1$, puis les relations :

$$p_{n+1} = p_n\,[x_n] + p_{n-1} \quad ; \quad q_{n+1} = q_n\,[x_n] + q_{n-1}.$$

Étudier le sens de variation et les limites des deux suites (p_n) et (q_n).

c) Calculer par récurrence $p_n\,q_{n+1} - p_{n+1}\,q_n$. Qu'en déduit-on pour la fraction $\frac{p_n}{q_n}$?

d) Prouver pour tout entier $n \geq 1$ la relation : $\alpha = \frac{p_n x_n + p_{n-1}}{q_n x_n + q_{n-1}}$.

e) Comparer, selon la parité de n, les nombres réels $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, α et $\frac{p_n}{q_n}$.

f) Montrer que la suite $(|\alpha - \frac{p_n}{q_n}|)$ est décroissante et que pour tout entier $n \geq 1$: $0 < |\alpha - \frac{p_n}{q_n}| \leq \frac{1}{q_n^2}$.

En déduire une suite de G_+^* convergeant vers 0, et retrouver l'égalité $g = 0$.

***